Список литературы

1. М а л а х о в с к и й В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Тр. геометр. семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-133.

2. С о п и н а Е.П. О конгруэнциях центральных квадрик в аффинном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 10, Калининград, 1979, с. 127-130.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 11 1980

Т.П. Ф у н т и к о в а

ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПАРОЙ ПРЯМЫХ

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные [1] конгруэнции $(L, L^*)_{2,1}$, порожденные прямыми L и L^*, причем многообразие (L) -двумерное, а многообразие (L^*) -одномерное. Соответствие между элементами многообразий таково, что полным прообразом прямой L^* является линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$, прямолинейной конгруэнции (L). Получены некоторые свойства конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$, а также рассмотрены расслояемые конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$.

Исследование ведется в каноническом репере $R=\{A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, вершина A которого совмещается с той точкой луча L, в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_{L^*}$ параллельна соответствующему лучу L^*, конец вектора $\vec{e}_1$ помещается в точку луча L^*, в которой касательная плоскость к поверхности (L^*) параллельна соответствующему лучу L, вектор $\vec{e}_3$ направлен по прямой L и пронормирован соответствующим образом. Система дифференциальных уравнений конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$ в репере R имеет следующий вид:

$$\omega^1+\omega_1^1=0, \quad \omega^1=b\,\omega_2^1, \quad \omega_2^3=c\,\omega^1, \quad \omega_3^2=m\,\omega_2^1+\omega_3^1,$$
$$\omega^3+\omega_1^3=v\,\omega_2^1, \quad \omega^2=l\,\omega_2^1+\kappa\,\omega_3^1, \quad \omega^3=q\,\omega_2^1+p\,\omega_3^1, \quad (1)$$
$$\omega_2^2=s\,\omega_2^1+h\,\omega_3^1, \quad \omega_1^2=k\,\omega_2^1+(v-\kappa)\,\omega_3^1.$$

Такие конгруэнции определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Доказано, что: I/аффинные нормали линейчатой поверхности $(L)_{L^*}$, взятые вдоль луча L, принадлежат плоскости Π -аффинно-биссекторной относительно плоскостей $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и $(A, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$; 2/касательная плоскость к фокальной поверхности (F) прямолинейной конгруэнции $(A, \vec{e}_2)$, проведенная в точке $\vec{F} = \vec{A} - \frac{b}{a}\vec{e}_2$, содержит луч L.

О п р е д е л е н и е. Конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$ называются расслояемыми, если пара прямолинейных конгруэнций: конгруэнция (L) и конгруэнции аффинных нормалей к поверхности (L^*) -двусторонне расслояема.

Расслояемые конгруэнции $(LL^*)_{2,1}$, у которых касательная к линии $\omega_3^1 = 0$ на поверхности (L^*) в точке $\vec{A}_1 = \vec{A} + \vec{e}_1$ параллельна прямой L, названы конгруэнциями $\mathcal{Z}$.

Направление касательной к линии $\omega_3^1 = 0$ на поверхности (L^*) в точке A_1 определяется вектором

$$\vec{E} = (h + \ell)\vec{e}_2 + v\vec{e}_3.$$

Эта касательная параллельна прямой L, при $\ell + h = 0$. Уравнение асимптотических линий на поверхности (L^*) в точке A_1 имеет тогда следующий вид

$$2v\omega_2^1 \cdot \omega_3^1 = 0.$$

Считаем $v \neq 0$, т.е. линейчатая поверхность (L^*) не является конической, тогда аффинная нормаль к поверхности (L^*) в точке A_1 определяется направляющим вектором

$$\vec{\eta} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + c\vec{e}_3.$$

Условие двухстороннего расслоения прямолинейной конгруэнции (L) и конгруэнции аффинных нормалей к поверхности (L^*) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \ell - b' + m(n - c - k) - s + 1 \neq 0, \quad c(a+n) + k(k-n) = 0, \\ ba - \ell n - ks + v + h - ckm = 0, \quad \ell - cm - 1 = 0, \\ (a+n)(\ell - b - 2cm) = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Исследование системы (2) приводит к трем возможным случаям: 1/ $p = 0$, 2/ $m = 0$, 3/ $p = m = 0$.

1/ В первом случае конгруэнции $\mathcal{Z}$, названные конгруэнциями $\mathcal{Z}_1$, определяются системой дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered} \omega^1 + \omega_1^1 = 0, \quad \omega^i = \omega_2^1, \quad \omega^2 + \omega_1^2 = v\omega_3^1, \quad \omega_3^2 = \omega_3^1, \\ \omega_2^3 = c\omega_2^1, \quad \omega^3 + \omega_1^3 = v\omega_2^1, \quad \omega^3 = (c+v)\omega_2^1 + p\omega_3^1, \\ \omega_2^2 = \omega_2^1 - v\omega_3^1, \quad dv = 2vc\,\omega_3^1, \quad dp \wedge \omega_3^1 = 0, \\ dc = [c(c-v) + p]\,\omega_3^1 \end{gathered} \tag{3}$$

с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а I. Конгруэнции $\mathcal{Z}_1$ обладают следующими свойствами: I/линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$ -торс, 2/все прямые прямолинейной конгруэнции (L) инцидентны одной плоскости, 3/линейчатая поверхность (L^*) и поверхности, огибающие семейства координатных плоскостей, являются несобственными аффинными сферами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 2/В силу уравнений системы (3)

$$d(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = -p\omega_3^1\vec{e}_3, \quad d\vec{e}_3 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + v\vec{e}_3)\omega_3^1,$$

$$d\vec{A} = [\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + (v+c)\vec{e}_3]\,\omega_2^1 + p\vec{e}_3\,\omega_3^1,$$

т.е. плоскость Π неподвижна и все прямые прямолинейной конгруэнции (L) инцидентны ей. 3/Асимптотические линии на поверхности (L^*) в точке A_1 и на огибающих поверхностях задаются следующими уравнениями:

$$(M_3), (L^*) \qquad \omega_2^1 \cdot \omega_3^1 = 0,$$

$$(M_1) \qquad (2v\omega_2^1 + \omega_3^1 \cdot p)\,\omega_3^1 = 0,$$

$$(M_2) \qquad [\omega_2^1 - (v+c)\omega_3^1] \cdot \omega_3^1 = 0,$$

где

$$\vec{M}_1 = \vec{A} - \vec{e}_2, \quad \vec{M}_2 = \vec{A} + \vec{e}_1 - v\vec{e}_3, \quad \vec{M}_3 = \vec{A} + \vec{e}_1 - \frac{v}{c}\vec{e}_2.$$

Асимптотические линии на рассматриваемых поверхностях-прямые, а аффинные нормали, определяемые направляющим вектором $\vec{\eta}=\vec{e}_1+\vec{e}_2+c\vec{e}_3$, взаимно параллельны, т.к. $d\vec{\eta}=c\omega_3^1\vec{\eta}$. Таким образом, поверхности $(L^*), (M_\alpha)_{\alpha=1,2,3}$ являются несобственными аффинными сферами.

2/Во втором случае конгруэнции $\mathcal{Z}$, названные конгруэнциями $\mathcal{Z}_2$, определяются системой дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\omega^1+\omega_1^1=0, \quad \omega^i=(1+cm)\omega_2^1, \quad \omega^3+\omega_1^3=v\omega_2^1, \\
\omega^2+\omega_1^2=v\omega_3^1, \quad \omega_2^3=c\omega_2^1, \quad \omega^3=(c+v)\omega_2^1, \\
\omega_3^2=m\omega_2^1+\omega_3^1, \quad \omega_2^2=(1-mv-cm)\omega_2^1-v\omega_3^1,
\end{gathered} \tag{4}
$$

$$
dv=2vc(\omega_3^1-m\omega_2^1), \quad dc=-cm(3c+v)\omega_2^1+ \\
+c(c-v)\omega_3^1, \quad (dm-2mv\omega_3^1)\wedge\omega_2^1=0
$$

с произволом одной функции одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции $\mathcal{Z}_2$ обладают следующими свойствами: I/линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$ -коническая поверхность, 2/прямолинейная конгруэнция (L) является параболической, 3/линейчатая поверхность (L^*) -цилиндроид, 4/фокальные многообразия прямолинейной конгруэнции (AA_1) являются соответственно линией и торсом, 5/индикатриса вектора $\vec{e}_2$ является плоскостью.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Так как $(d\vec{A})_{\omega_2^1=0}=0$, то линейчатая поверхность $(L)_{L^*}$, определяемая уравнением $\omega_2^1=0$, -торс. 2/Фокусы луча прямолинейной конгруэнции (L) и торсы задаются уравнениями

$$
\vec{F}_{1,2}=\vec{A}+\lambda\vec{e}_3, \quad \lambda^2 m=0, \quad (c^2+1)m(\omega_2^1)^2=0,
$$

т.е. (L) -параболическая конгруэнция.

3/Так как $(\vec{e}_2, d\vec{e}_2, d^2\vec{e}_2)$, то линейчатая поверхность (L^*)-цилиндр с направляющей плоскостью $(\vec{e}_2, \vec{e}_1+c\vec{e}_3)$.

4/Фокальные точки луча прямолинейной конгруэнции определяются следующим образом:

$$
\vec{F}_1=\vec{A}, \quad \vec{F}_2=\vec{A}+\frac{c+v}{c}\vec{e}_1,
$$

причем

$$
d\vec{A}=[(1+cm)(\vec{e}_1+\vec{e}_2)+(c+v)\vec{e}_3]\omega_2^1, \quad (d\vec{F}_2, \vec{e}_1+\vec{e}_2, d(\vec{e}_1+\vec{e}_2))=0,
$$

т.е. (F_1) -линия, (F_2) -торс.

5/Для конгруэнции $\mathcal{Z}_2$

$$
d\vec{e}_2=(\vec{e}_1+\vec{e}_2+c\vec{e}_3)\omega_2^1+[m(c+v)\omega_2^1+v\omega_3^1]\vec{e}_2,
$$

следовательно индикатриса вектора $\vec{e}_2$ есть плоскость, параллельная направляющей плоскости цилиндра (L^*) .

В третьем случае получаем класс конгруэнций, являющийся пересечением классов конгруэнций $\mathcal{Z}_1$ и $\mathcal{Z}_2$.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве. - В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

7 Зак. 9373